Classification thématique de MÉGAMATHS
megamaths.fr / © 2022 DJM / ctqc03200413p
Rubrique : arithmétique
Réf. Anthologie des questions du jury du CAPES maths, Vol. III / Éd. 2021 [2]

On me demande la résolution d'un système du style x+pgcd(x,y)=3 et x+3y=5, et je galère...

Voici une question posée à brûle-pourpoint par le jury d'oral du CAPES externe en 2017, où l'on demande de résoudre un système d'inconnues entières où figure le pgcd de x et y. Chose extraordinaire : cette question a été posée pendant l'entretien qui suivit la leçon d'oral 1 intitulée « Systèmes d'équation et d'inéquations ; méthodes de résolution », ***à un moment où l'on ne s'attend pas*** *à une question d'arithmétique.*

Cela montre bien que le jury a tous les droits pour tester un candidat sur les fondamentaux, quels qu'ils soient, même si le rapport avec l'exposé est ténu. Une bonne préparation à l'oral est aussi une préparation générale sur tous les thèmes au programme permettant de réagir en toutes circonstances.

Le lecteur intéressé pourra retrouver le compte rendu complet de cet oral sur le Blog de MégaMaths [1], où le candidat explique :

> *« On me demande la résolution d'un système du style $x + \text{pgcd}(x, y) = 3$ et $x + 3y = 5$. Je galère mais j'entame un raisonnement par substitution, avec leur aide. »*

Cela montre aussi que le jury aide le candidat en lui donnant de précieuses indications, et en observant au passage si cela déclenche des automatismes : une bonne raison d'affûter ses réflexes pendant sa préparation. Rassurons-nous, la candidate réussira ses oraux haut la main, même si cette question particulière a dû engendrer beaucoup de frayeurs.

QUESTION

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + \text{pgcd}(x, y) = 3 \\ x + 3y = 5. \end{array} \right.$$

RÉPONSE

Préliminaire — Pour que la première équation du système (S) n'aie qu'un seul sens, on considère ici que, par convention (admise dans le secondaire), le pgcd de deux entiers relatif est toujours positif. Dans un anneau principal quelconque, le pgcd de deux éléments est défini à une constante multiplicative inversible près. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ étant ± 1, cela autorise à écrire $\mathrm{pgcd}(x,y) = \pm\delta$ pour un entier naturel δ convenable. Ce n'est pas la convention choisie ici.

Première solution (substitution) — Si (x, y) est une solution de (S), alors $x = 5-3y$ et en remplaçant dans la première équation $x+\mathrm{pgcd}(x,y) = 3$, soit $\mathrm{pgcd}(5-3y, y) = 3y-2$. Avoir $y = 0$ est impossible car $\mathrm{pgcd}(5,0) = 5 \neq -2$. Continuons donc en supposant $y \neq 0$. Si $\mathrm{pgcd}(5-3y, y) = 3y-2$, alors $|3y-2|$ divise $|y|$, donc $|3y-2| \leq |y|$ puisque $|y| \neq 0$. De deux choses l'une :

- Si $y > 0$, alors $3y-2 \leq y$, soit $y \leq 1$, donc $y = 1$ et $x = 5-3\times 1 = 2$.
- Si $y < 0$, on obtient $-3y+2 \leq -y$, soit $y \geq 1$, ce qui est absurde car on travaille sous l'hypothèse où $y < 0$.

On peut maintenant affirmer que, s'il existe un couple-solution (x, y) de (S), alors nécessairement $(x, y) = (2, 1)$. Il suffit de remplacer dans (S) pour constater que $(2, 1)$ est bien solution du système. En conclusion (S) admet l'unique solution $(2, 1)$.

Commentaires — Une simple substitution est à tenter *a priori*. Le jury observe les réactions du candidat devant ce système original et sera content de le voir suivre une piste. Attention à ne pas conclure trop vite que $(2, 1)$ est l'unique solution du système, car le raisonnement ci-dessus est formé d'implications, non d'équivalences. Conclure trop vite et sans précaution serait une grave erreur de raisonnement qui dévoilerait des lacunes inacceptables pour un futur professeur de mathématiques.

Seconde solution proposée par Pascal Froment — Si (x, y) est solution de (S), alors $\mathrm{pgcd}(x,y) = 3-x$ et la seconde équation s'écrit $3y-2 = 3-x$. Par suite $3-x$ divise x, y et $3y-2$, donc $3-x$ divise -2. On en déduit que $3-x \in \{-2,-1,1,2\}$, soit $x \in \{1,2,4,5\}$. On n'a plus qu'à réinjecter dans le système (S) pour voir :

- Si $x = 1$, alors $x+3y = 5$ donne $3y = 4$, absurde.
- Si $x = 2$, alors $x+3y = 5$ donne $3y = 3$, soit $y = 1$, et l'on vérifie qu'alors $x+\mathrm{pgcd}(x,y) = 2+\mathrm{pgcd}(2,1) = 3$. Donc $(x,y) = (2,1)$ est solution de (S).
- Si $x = 4$, alors $x+3y = 5$ donne $3y = 1$, absurde.
- Si $x = 5$, $x+3y = 5$ donne $y = 0$ et $x+\mathrm{pgcd}(x,y) = 5+\mathrm{pgcd}(5,0) \neq 3$, ce qui ne donne pas de nouvelle solution.

On retrouve l'unique solution $(2, 1)$.

Remarque — Les cas où $x = 4$ ou 5 peuvent être facilement éliminés en rappelant que, par convention, $\text{pgcd}(x, y) = 3 - x$ entraîne $3 - x \geq 0$ soit $x \leq 3$. Ne pas avoir utilisé cette positivité du pgcd permet de voir que le raisonnement convient encore si l'on choisit qu'un pgcd est défini au signe près, ce qui revient à sous-entendre que l'équation $x + \text{pgcd}(x, y) = 3$ équivaut à $\text{pgcd}(x, y) = 3 - x$ ou $\text{pgcd}(x, y) = -(3 - x)$.

References

[1] Blog de MégaMaths, Deux oraux du CAPES maths parfaitement réussis !, 2017. http://megamathsblog.blogspot.com/2017/07/deux-oraux-du-capes-maths-parfaitement.html

[2] D.-J. Mercier, Anthologie des questions du jury du CAPES maths, Volume III / Édition 2021, IP, 2021.